数理解析研究所講究録
564巻 1985年 210-221

COSMETATOSの近似式の一般化について

東京工業大学　木村俊一 (TOSHIKAZU KIMURA)

1. まえがき

この論文では、ある一般的な複数窓口待ち行列における平均待ち時間に対して、発見的ではあるが高い精度をもつ幾つかの近似公式を与える。複数窓口待ち行列として標準的なGI/G/s待ち行列を考える：s個の並列な窓口と無限容量の待ち合い室をもち、先着順サービス規範にしたがっていることを仮定する。各窓口でのサービス時間は *i.i.d.* な確率変数によって表わされ、客の到着過程はサービス過程とは独立な再生過程にしたがうと仮定する。勿論、このような一般的な仮定の下では、待ち特性量の解析は非常に困難であることが良く知られている。このGI/G/s待ち行列における平均待ち時間を、M/M/s, M/D/s, D/M/sのような解析可能な待ち行列における平均待ち時間を組み合わせることで近似することを考える（詳細については、Kimura (1984b) を参照のこと）。

GI/G/s待ち行列における（客の到着時点からサービス開始直前までの）平均待ち時間を $EW \equiv EW(GI/G/s)$ で表わすことにする。ただし、システムは安定（stable）であることを仮定する。u と v で、それぞれ、到着時間間隔とサービス時間を表わす確率変数を代表させる。u と v のモーメントを表わす記号として、$\lambda = 1/E[u]$, $\mu = 1/E[v]$, $C_a^2 = \lambda^2 Var[u]$, $C_s^2 = \mu^2 Var[v]$ を導入する。さらに、トラヒック密度を $\rho = \lambda/s\mu$ (<1) とおく。このとき、我々がこの論文で提案する異なる8種類の近似公式の中で、ある平均的な意味で最良の近似公式は次式で与えられる。

$$EW(GI/G/s) \simeq \frac{\rho(C_a^2+C_s^2)}{2s\mu(1-\rho)} \cdot \prod_{n=2}^{s} k_n \cdot g \tag{1}$$

ここで、

$$k_n = \begin{cases} \left[(1-C_a^2)\dfrac{EW(D/M/n-1)}{EW(D/M/n)} + (1-C_s^2)\dfrac{EW(M/D/n-1)}{EW(M/D/n)} + (C_a^2+C_s^2-1)\dfrac{EW(M/M/n-1)}{EW(M/M/n)}\right]^{-1}, & \text{if } C_a^2 \leqq 1 \\[2ex] \left[\dfrac{1-C_a^2}{C_a^2+C_s^2}\dfrac{EW(D/M/n)}{EW(D/M/n-1)} + \dfrac{1-C_s^2}{C_a^2+C_s^2}\dfrac{EW(M/D/n)}{EW(M/D/n-1)} + \dfrac{2(C_a^2+C_s^2-1)}{C_a^2+C_s^2}\dfrac{EW(M/M/n)}{EW(M/M/n-1)}\right], & \text{if } C_a^2 > 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$g = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{2(1-\rho)}{3\rho}\dfrac{(1-C_a^2)^2}{C_a^2+C_s^2}\right\}, & \text{if } C_a^2 \leqq 1 \\[2ex] 1, & \text{if } C_a^2 > 1. \end{cases} \tag{3}$$

近似公式(1)は次の特徴をもっている：

(i)　(1)は、M/M/S, M/D/S, M/G/1待ち行列に対しては厳密解を与える。しかし、D/M/S 待ち行列に対しては厳密解を与えない。この意味で、近似公式(1)は不完全な内挿近似（interpolation approximation）であるといえる。

(ii)　(1)は、重負荷時には、Köllerström (1974) の導いた極限定理の性質を満たしている。すなわち、

$$\lim_{\rho \uparrow 1} 2S\mu(1-\rho)EW = C_a^2 + C_s^2 \tag{4}$$

(iii)　(1)は、uとvとの2次までのモーメントによって完全に特徴付けられる2－モーメント近似式である。特に、S=1のときには、ソフトウェア QNA（Queueing Network Analyzer）で用いられている修正された Kraemer & Langenbach-Belz (1976) の2－モーメント近似式と一致する（Whitt (1983) 参照）。

2. Cosmetatos の近似式の一般化

Cosmetatos (1974, 1976)は、M/G/S, GI/M/S 待ち行列の平均待ち時間に対して、次の近似関係式を提案している。$m > n \geq 1$に対して、

$$\frac{EW(M/G/m)}{EW(M/G/n)} \simeq \frac{1-C_s^2}{1+C_s^2}\frac{EW(M/D/m)}{EW(M/D/n)} + \frac{2C_s^2}{1+C_s^2}\frac{EW(M/M/m)}{EW(M/M/n)} \tag{5}$$

$$\frac{EW(GI/M/m)}{EW(GI/M/n)} \simeq \frac{1-C_a^2}{1+C_a^2}\frac{EW(D/M/m)}{EW(D/M/n)} + \frac{2C_a^2}{1+C_a^2}\frac{EW(M/M/m)}{EW(M/M/n)} \tag{6}$$

関係式(5),(6)より、m,nを適当に定めることで、異なった2つのタイプの近似式を導いている。

本論文では、(5),(6)をヒントにして、$EW(GI/G/s)$に対して次の形の近似関係式を考察する。すなわち、

$$\frac{EW(GI/G/m)}{EW(GI/G/n)} \simeq w_{01}\frac{EW(D/M/m)}{EW(D/M/n)} + w_{10}\frac{EW(M/D/m)}{EW(M/D/n)} + w_{11}\frac{EW(M/M/m)}{EW(M/M/n)} \tag{7}$$

ただし、$w_{ij} \equiv w_{ij}(C_a^2, C_s^2)$　$(i,j=0,1,\ i+j \geq 1)$は適当な重み関数で、次の条件を満たすことを仮定する。

$$w_{01}(1, C_s^2) = w_{10}(C_a^2, 1) = 0 \tag{8}$$

$$w_{01}(0,1) = w_{10}(1,0) = w_{11}(1,1) = 1 \tag{9}$$

(7)においては、mとnの大小関係に対して自明な場合(i.e., m=n)を除き、何の制約も設けないことに注意しよう。重負荷における性質(4)より、重み関数$\{w_{ij}\}$の間には、

$$w_{01} + w_{10} + w_{11} = 1 \tag{10}$$

の関係式が成り立つことも直ちにわかる。

本論文では、(8),(9),(10)に加えて、以下の2つの条件を用いて重み関数の形を具体的に決定する。

① $M/G/\infty$待ち行列に対する重み関数の整合性。

② 変動係数 C_a, C_s に関する対称性。

Remark 1.　後述するように、①,②の条件を付加しても重み関数を一意には決定できない。より正確な重み関数の決定のためには、GI/G/s待ち行列の軽負荷時等での定性的研究がさらに必要である。

3. 重み関数の導出

表記上の簡便さのため、$\tilde{w}_{ij} \equiv w_{ij}(1, c_s^2)$ とおく。(8), (10) より、明らかに、

$$\tilde{w}_{10} + \tilde{w}_{11} = 1 \tag{11}$$

が成り立つ。ここで、M/G/∞待ち行列における重み関数の性質を知るために、Boxma et al. (1979) にしたがい、EW(M/G/s) を正規化した量として正規化協力係数 (normed cooperation coefficient) N_{GS} を導入する。

$$N_{GS} \equiv \frac{EW(M/M/s)}{EW(M/M/1)} \Big/ \frac{EW(M/G/s)}{EW(M/G/1)} \tag{12}$$

と定義する。このとき、$s \to \infty$ に対して、

$$\lim_{s \uparrow \infty} N_{GS} = \frac{1 + c_s^2}{2} \tag{13}$$

が成り立つ。(7)において、$m=s, n=1$、又は、$m=1, n=s$ とおいて(12)に代入すると、

$$
N_{GS} = \begin{cases} \left[2\tilde{W}_{10} \dfrac{EW(M/D/S)}{EW(M/M/S)} + \tilde{W}_{11} \right]^{-1}, & S = m > n = 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2} \tilde{W}_{10} \dfrac{EW(M/M/S)}{EW(M/D/S)} + \tilde{W}_{11}, & S = n > m = 1 \end{cases} \tag{14}
$$

を得る。(11),(13),(14)より、

$$
\tilde{W}_{10} = \begin{cases} (1-C_s^2)/(1+C_s^2), & m > n \\ 1 - C_s^2, & m < n \end{cases} \tag{15}
$$

$$
\tilde{W}_{11} = \begin{cases} 2C_s^2/(1+C_s^2), & m > n \\ C_s^2 & m < n \end{cases} \tag{16}
$$

が得られる。条件(8),(9),(10),(15),(16)を全て満たし、C_a^2とC_s^2に関して対称な重み関数は唯一には定まらないが、その中でも簡単なものとして、次の形の重み関数を提案する。

(i) $m > n$のとき

Case A: $\quad W_{01} = (1-C_a^2)/C,\ W_{10} = (1-C_s^2)/C,\ W_{11} = 2(C-1)/C \qquad (17)$

Case B: $\quad W_{01} = (1-C_a^2)C_s^2/C,\ W_{10} = C_a^2(1-C_s^2)/C,\ W_{11} = 2C_a^2C_s^2/C \qquad (18)$

ただし、 $\quad C = C_a^2 + C_s^2$

(ii) $m < n$のとき

Case A^*: $\quad W_{01} = 1 - C_a^2,\ W_{10} = 1 - C_s^2,\ W_{11} = C_a^2 + C_s^2 - 1 \qquad (19)$

Case B^*: $\quad W_{01} = (1-C_a^2)C_s^2/C^*,\ W_{10} = C_a^2(1-C_s^2)/C^*,\ W_{11} = C_a^2C_s^2/C^* \qquad (20)$

ただし、 $\quad C^* = C_a^2 + C_s^2 - C_a^2C_s^2$

Remark 2. $M/G/s$, $GI/M/s$ 待ち行列に対しては、Case A = Case B, Case A^* = Case B^* となり、$m>n$ のとき、Cosmetatos の近似関係式(5), (6)に現われる重み関数と一致する。

4. EW(GI/G/s)に対する近似公式

(17)~(20)のいずれかの重み関数にしたがう近似関係式(7)より、2つの異なったタイプの EW(GI/G/s)に対する近似公式を導くことにしよう。

(i) $m>n$ のとき

(7)において、$m=s$, $n=1$ とおき整理すると、

[公式 I]

$$EW \simeq EW(GI/G/1)\left\{ W_{01}\frac{EW(D/M/s)}{EW(D/M/1)} + W_{10}\frac{EW(M/D/s)}{EW(M/D/1)} + W_{11}\frac{EW(M/M/s)}{EW(M/M/1)} \right\} \quad (21)$$

を得る。また、$n=m-1$ とおくと、(7)は m に関して再帰的な式となり、逐次的に m の値を s から1まで小さくしてゆくと、

[公式 II]

$$EW \simeq EW(GI/G/1)\prod_{n=2}^{s}\left\{ W_{01}\frac{EW(D/M/n)}{EW(D/M/n-1)} + W_{10}\frac{EW(M/D/n)}{EW(M/D/n-1)} + W_{11}\frac{EW(M/M/n)}{EW(M/M/n-1)} \right\} \quad (22)$$

を得る。

同様にして、

(ii) $m<n$ のとき

[公式 I^*]

$$EW \simeq EW(GI/G/1) \Big/ \left\{ W_{01} \frac{EW(D/M/1)}{EW(D/M/S)} + W_{10} \frac{EW(M/D/1)}{EW(M/D/S)} + W_{11} \frac{EW(M/M/1)}{EW(M/M/S)} \right\} \quad (23)$$

[公式 II^*]

$$EW \simeq EW(GI/G/1) \Big/ \prod_{n=2}^{S} \left\{ W_{01} \frac{EW(D/M/n-1)}{EW(D/M/n)} + W_{10} \frac{EW(M/D/n-1)}{EW(M/D/n)} + W_{11} \frac{EW(M/M/n-1)}{EW(M/M/n)} \right\} \quad (24)$$

が得られる。公式 I 及び I^* は、II 及び II^* に比べ利用する厳密解が少なくてすみ、取り扱い易さの上では優っている。重み関数のケースと公式のタイプの組み合わせにより、総計8種類の EW(GI/G/S) に対する近似公式が導かれたことがわかる。これらを区別するために、以下では、例えば重み関数が Case A のとき、公式 I を IA、Case A^* のとき公式 I^* を IA^* 等と呼ぶことにする。

<u>Remark 3.</u> 明らかに S=2 に対しては、公式 I(I^*) と公式 II(II^*) は一致する。したがって、Remark 2 より、M/G/2, GI/M/2 待ち行列に対しては、

$$IA = IB = IIA = IIB, \qquad IA^* = IB^* = IIA^* = IIB^*$$

となり、m, n の大小関係のみに依存する2種類の異なった近似公式だけとなる。

各近似公式中には、対象となるGI/G/s待ち行列と窓口数以外は同じ単一窓口待ち行列に対する平均待ち時間EW(GI/G/1)が含まれている。しかし、特別な場合(e.g., M/G/1 待ち行列等)を除いては、この値を求めることは必ずしも容易ではない。そこで、この論文では、計算の容易な2-モーメント近似式で、EW(GI/G/1)を近似することにする。EW(GI/G/1)に対しては、Page (1972), Kraemer & Langenbach-Belz (1976), Kimura (1984a) 等の発見的近似式を始めとして、Gelenbe (1975), Kobayashi (1974), Kimura (1985) の拡散近似解等々、種々の近似式が提案されている。ここでは、非マルコフ型待ち行列ネットワークを近似解析するソフトウェア QNA (Whitt (1983)) でも採用され、安定した精度をもつことが数値的に確かめられている修正された Kraemer & Langenbach-Belz の近似式:

$$EW(GI/G/1) \simeq \frac{C_a^2 + C_s^2}{2} g\, EW(M/M/1) \tag{25}$$

を用いることにする。ただし、g は(3)によって与えられる。(25)は M/G/1 待ち行列に対しては厳密解と一致するが、GI/M/1 待ち行列では一致しないため、(25)を用いた近似公式は、EW(D/M/s)に対しては厳密解を与えないことに注意しよう。しかし、M/D/s, M/M/s, M/G/1 待ち行列に対しては、全ての近似公式は厳密解を与える。

5. 数値例

前節で導びかれた8種類の近似公式の精度を数値例により比較してみよう。表1及び表2は、Hillier & Yu (1982) の数表に示されている幾つかの EW(Em/Ez/S) の厳密解と近似公式との相対誤差(%)を表わしたものである。輻輳の程度としては、中程度の負荷 ($\rho=0.5$) と重負荷 ($\rho=0.9$) について比較を行っている。

これらの表より、近似精度は公式のタイプよりも重み関数の選び方に大きく依存していることがわかる。明らかに、Case A (A^*) の方が Case B (B^*) よりも良い結果を与えている。また、重負荷ではさほどの差は出ないものの、$\rho=0.5$ においては、公式IIの方が公式Iよりも高い精度をもっていることがわかる。

Em/Ez/S 待ち行列に関する限り、$m<n$ の場合に導かれた近似公式群の方が、$m>n$ の場合のそれらよりも安定した近似精度をもっていることが表から読みとることができる。しかし、$C_a^2>1$ となる待ち行列に対しては、その後の検証により、公式 I^*, II^* は、おおよそ $\rho<0.6$ の範囲で、極めて不安定な振舞いを示すことが確かめられた。公式I, IIについては、このような不安定さは全く認められず、このことから、$C_a^2>1$ に対しては公式 I^*, II^* は適切ではないと結論できる。

以上の考察から、総合的にはIIAが、また$c_a^2<1$のときに限ってIIA*が精度の高い近似式として推薦できる。

References

Boxma, O.J., J.W. Cohen and N. Huffels. 1979. Approximations of the Mean Waiting Time in an M/G/s Queueing System. Opns. Res. 27, 1115-1127.

Cosmetatos, G.P. 1974. Approximate Equilibrium Results for the Multi-Server Queue (GI/M/r). Opnl. Res. Quart. 25, 625-634.

Cosmetatos, G.P. 1976. Some Approximate Equilibrium Results for the Multi-Server Queue (M/G/r). Opnl. Res. Quart. 27, 615-620.

Gelenbe, E. 1975. On Approximate Computer System Models. J. ACM. 22, 261-269.

Hillier, F.S. and O.S. Yu. 1982. Queueing Tables and Graphs. North-Holland, New York.

Kimura, T. 1984a. A Two-Moment Approximation for the Mean Waiting Time in the GI/G/s Queue. Research Report on Information Sciences, No. B-154, Tokyo Institute of Technology.

Kimura, T. 1984b. Heuristic Approximations for the Mean Waiting Time in the GI/G/s Queue. Research Report on Information Sciences, No. B-155, Tokyo Institute of Technology.

Kimura, T. 1985. Refining Diffusion Approximations for GI/G/1 Queues. Proc. 11th International Teletraffic Congress, Kyoto (Research Report on Information Sciences, No. B-161, Tokyo Institute of Technology).

Kobayashi, H. 1974. Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks I: Equilibrium Queue Distributions. J. ACM. 21, 316-328.

Kollerstrom, J. 1974. Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers, I. J. Appl. Prob. 11, 544-552.

Kraemer, W. and M. Langenbach-Belz. 1976. Approximate Formulae for the Delay in the Queueing System GI/G/1. Proc. 8th International Teletraffic Congress, Melbourne, pp. 235-1/8.

Page, E. 1972. Queueing Theory in OR. Butterworth, London.

Whitt, W. 1983. The Queueing Network Analyzer. Bell System Tech. J. 62, 2779-2815.

Table 1. Relative Percentage Errors of Approximations for $EW(E_m/E_2/s)$: Primal Formulas (ρ = 0.5, 0.9).

ρ	m	s	IA	IB	IIA	IIB	Page
0.5	2	4	14.80	28.88	7.65	24.47	42.65
	3	4	8.24	34.23	0.05	27.88	70.13
	4	4	-0.74	34.25	-7.51	27.22	88.04
	9	4	-31.47	26.85	-27.54	20.62	120.64
	2	8	46.69	75.00	3.79	46.44	101.43
	3	8	57.46	127.36	-2.13	74.96	208.63
Average			15.83 (26.57)	54.42	-4.28 (8.11)	36.93	105.25
0.9	2	4	1.28	2.39	1.24	2.36	2.53
	3	4	0.66	2.44	0.61	2.41	3.65
	4	4	-0.12	2.12	-0.16	2.08	4.23
	9	4	-2.62	0.64	-2.61	0.61	5.10
	2	8	1.22	3.40	1.01	3.27	3.62
	3	8	1.95	5.57	1.72	5.41	6.92
Average			0.40 (1.31)	2.76	0.30 (1.23)	2.69	4.34

Table 2. Relative Percentage Errors of Approximations for $EW(E_m/E_2/s)$: Dual Formulas (ρ = 0.5, 0.9).

ρ	m	s	IA*	IB*	IIA*	IIB*	Kimura
0.5	2	4	-5.65	6.41	0.61	12.60	-33.78
	3	4	-3.45	6.63	2.21	12.76	-23.80
	4	4	-1.52	6.50	3.54	11.96	-12.74
	9	4	3.63	6.50	7.37	9.66	26.68
	2	8	-35.90	-16.94	-9.40	17.40	-58.86
	3	8	-20.16	-2.67	5.39	32.90	-40.19
Average			-10.51 (11.72)	1.07 (7.61)	1.62 (4.75)	16.21	-23.78 (32.68)
0.9	2	4	1.14	1.91	1.19	1.95	-0.92
	3	4	1.16	1.80	1.21	1.84	-0.03
	4	4	0.99	1.45	1.04	1.49	0.82
	9	4	0.19	0.13	0.23	0.16	3.11
	2	8	0.72	2.29	0.93	2.45	-1.45
	3	8	2.73	4.09	2.95	4.27	1.41
Average			1.16	1.95	1.26	2.03	0.49 (1.29)

Note: The average absolute relative percentage error is in parentheses below the average.